Über die Berechnung von Versicherungswerten unter der Annahme eines zeitlich veränderlichen Rechnungszinsfußes

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

Von

Gerhard Hoffmann

aus Neuenhagen bei Berlin

Tag der Promotion: 16. November 1937
Tag der mündlichen Prüfung: 26. Mai 1937

Spezialbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig
1937

N 75

Referenten: Professor Dr. P. Riebesell
Professor Dr. A. Klose

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Ein zeitlich veränderlicher Rechnungszinsfuß wird in der Praxis nicht verwendet. Auch in der versicherungsmathematischen Literatur trifft man verhältnismäßig selten auf Arbeiten, die sich mit ihm beschäftigen. Zum ersten Male tritt er bei Hardy[1]) und Fackler[2]) auf. Beide berechnen die vorkommenden Versicherungswerte, ohne Näherungen für den Barwert $v_1 v_2 \cdots v_\nu$ der Summe 1 zu verwenden. Hardy nimmt ein gleichmäßiges Sinken des Zinsfußes in 15 Jahren von $3^3/_4$ % auf 3 % an, und Fackler läßt ihn alle 10 Jahre um $^1/_2$ % von $4^1/_2$ % auf 2 % abnehmen. Aus der neueren Zeit sind u. a. außer einer Arbeit von Giaccardi[3]), der eine sinusförmige Zinsintensität behandelt, zwei Arbeiten von Riedl[4]) und Liebetanz[5]) zu erwähnen. Im Gegensatz zu Hardy und Fackler verwenden die beiden Letztgenannten Näherungen für $v_1 v_2 \cdots v_\nu$.

Der Grundgedanke bei Riedl ist der, daß die Größe $\frac{v_1 v_2 \cdots v_\nu}{v_0{}^\nu}$ (wo v_0 der zum Ausgangs- oder Grundzinsfuß i_0 gehörige Diskontierungsfaktor ist) bei gleichmäßigen Zinsänderungen von 1—2 % in einem Zeitraum bis zu 15 Jahren und bei solchen von höchstens 1 % in Zeiträumen bis zu 30 Jahren in guter Annäherung durch eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung dargestellt werden kann. So geht er von dem Ansatz

---

[1]) R. P. Hardy, On a method of valuation that will produce a definite reserve at the end of a fixed period, and where the rate of interest yielded upon the accumulations varies annually throughout such period. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. XXXI, 325, 1894.

[2]) D. P. Fackler, Proper charges for annuities and insurances to provide for a decreasing rate of interest. Papers and Transactions of the Actuarial Society of America, Vol. IV, 32, 1895.

[3]) F. Giaccardi, Sul valore capitale di una rendita certa a termini costanti e tasso variabile sinusoidalmente. Giornale di Matematica Finanziaria, Serie II, Vol. V, N. 1, 1935.

[4]) J. Riedl, Die Bewegungen des Zinsfußes vor und nach dem Weltkriege und ihre finanzielle Auswirkung in der Lebensversicherung samt einer Methode zur Berechnung von Prämien mit variablem Zinsfuß. Wien 1928 (Maschinenschrift).

[5]) P. Liebetanz, Der fallende Rechnungszinsfuß in der Lebensversicherung. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft Bd. 26 S. 40, 1926.

$$\frac{v_1 v_2 \cdots v_\nu}{{v_0}^\nu} = a + b\,\nu + c\,\frac{\nu\,(\nu+1)}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

aus und bestimmt darin die Konstanten a, b und c.

Liebetanz nimmt einen jährlich um denselben Betrag abnehmenden Zinsfuß an:

(1) $$i_\nu = i_0 - \nu\,d \qquad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

Mit $\delta = \dfrac{d}{1+i_0}$ wird dann:

(2) $$\frac{v_1 v_2 \cdots v_\nu}{{v_0}^\nu} = \frac{1}{(1-\delta)\,(1-2\,\delta)\cdots(1-\nu\,\delta)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks entwickelt er in eine Taylorsche Reihe nach δ an der Stelle $\delta = 0$ und bricht beim linearen Gliede ab. Durch Einsetzen der so entstehenden Ausdrücke

$$\frac{v_1 v_2 \cdots v_\nu}{{v_0}^\nu} = 1 + \frac{\nu\,(\nu+1)}{2}\,\delta$$

in

(3) $$1 + i_\nu = \frac{v_1 v_2 \cdots v_{\nu-1}}{v_1 v_2 \cdots v_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots) \text{ und } 1 + i_1 = \frac{1}{v_1}$$

ergibt sich:

(4) $$1 + i_\nu = (1 + i_0)\,\frac{1 + \dfrac{(\nu-1)\,\nu}{2}\,\delta}{1 + \dfrac{\nu\,(\nu+1)}{2}\,\delta} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

Diese von den gegebenen (Formel (1)) abweichenden i_ν-Werte legt er den weiteren Rechnungen zugrunde [6]).

In der vorliegenden Arbeit soll einmal durch Hinzunahme eines weiteren Gliedes der Reihenentwicklung von (2), nämlich des in δ quadratischen, die Liebetanzsche Näherung verbessert werden. Andererseits soll das Verfahren erweitert werden, um auch andere Zinsannahmen als die einer jährlich gleichbleibenden Abnahme behandeln zu können, etwa die, daß der Zinsfuß eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bildet.

---

[6]) Bei dem Liebetanzschen Verfahren wird also für die Berechnung der Versicherungswerte ein von dem ursprünglich angenommenen abweichender Zinsverlauf benutzt.

I. Hinzunahme des in δ quadratischen Gliedes.

1. Entwicklung der allgemeinen Formeln.

Bricht man in der Reihenentwicklung von

$$\frac{1}{(1-\delta)(1-2\delta)\cdots(1-\nu\delta)}$$

beim quadratischen Gliede ab, so wird der Barwert $v_1 v_2 \cdots v_\nu$ der in ν Jahren fällig werdenden Summe 1 nach (2):

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 v_2 \cdots v_\nu &= v_0{}^\nu \left(1+\frac{\nu(\nu+1)}{2}\delta+\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}\delta^2\right) \\ &\qquad\qquad (\nu=1,2,\cdots) \\ &= (v_1 v_2 \cdots v_\nu)_2+v_0{}^\nu \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}\delta^2, \end{aligned}\right.$$

wo $(v_1 v_2 \cdots v_\nu)_2$ die von Liebetanz verwendete Näherung ist. Es gilt:

$$v_0{}^\nu < (v_1 v_2 \cdots v_\nu)_2 < v_1 v_2 \cdots v_\nu < \frac{v_0{}^\nu}{(1-\delta)(1-2\delta)\cdots(1-\nu\delta)},$$

d. h. die Näherung zweiter Ordnung liegt näher am wahren Wert, was zu erwarten war.

Setzt man den Ausdruck (5) für $v_1 v_2 \cdots v_\nu$ in (3) ein, so ergibt sich:

$$(6)\quad 1+i_\nu = (1+i_0)\frac{1+\frac{(\nu-1)\nu}{2}\delta+\frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)(3\nu-2)}{4!}\delta^2}{1+\frac{\nu(\nu+1)}{2}\delta+\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}\delta^2}$$

$$(\nu=1,2,\cdots).$$

Durch Vergleich der mit dieser Formel berechneten und den weiteren Rechnungen zugrunde liegenden i_ν-Werte und der gegebenen (Formel (1)) kann man die Güte der Näherung bestimmen.

In der Übersicht 1 sind für ein von Liebetanz angegebenes Beispiel ($i_0 = 0{,}04$, $d = 0{,}0008$) die Zinsfüße verglichen, wie sie sich während 25 Jahren ergeben, wenn man in der Reihenentwicklung von (2) beim linearen und beim quadratischen Gliede abbricht (s. die Formeln (4) und (6)). Während bei Verwendung von (6) die größte Abweichung vom gegebenen Zinsfuß (bei $\nu=25$) 0,0513 % beträgt, liefert (4) eine solche von 0,4000 %.

Übersicht 1.

Gegebener und nach (4) und (6) berechneter Zinsfuß.

Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (4) berechn. Zinsfuß %	Nach (6) berechn. Zinsfuß %	Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (4) berechn. Zinsfuß %	Nach (6) berechn. Zinsfuß %
1	3,92	3,9201	3,9200	14	2,88	2,9637	2,8837
2	3,84	3,8404	3,8400	15	2,80	2,9014	2,8051
3	3,76	3,7611	3,7600	16	2,72	2,8412	2,7268
4	3,68	3,6824	3,6800	17	2,64	2,7832	2,6490
5	3,60	3,6046	3,6000	18	2,56	2,7274	2,5717
6	3,52	3,5276	3,5201	19	2,48	2,6738	2,4950
7	3,44	3,4518	3,4401	20	2,40	2,6225	2,4189
8	3,36	3,3772	3,3603	21	2,32	2,5735	2,3436
9	3,28	3,3041	3,2805	22	2,24	2,5267	2,2691
10	3,20	3,2325	3,2008	23	2,16	2,4822	2,1954
11	3,12	3,1625	3,1212	24	2,08	2,4400	2,1228
12	3,04	3,0943	3,0418	25	2	2,4000	2,0513
13	2,96	3,0280	2,9626				

Im folgenden sollen die Formeln für den Barwert der lebenslänglichen vorschüssig zahlbaren Leibrente und die Einmalprämie der lebenslänglichen Todesfallversicherung hergeleitet werden. Daraus ergibt sich dann die jährliche Nettoprämie derselben Versicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung und das Nettodeckungskapital.

Zu beachten ist bei der Verwendung eines zeitlich veränderlichen Rechnungszinsfußes noch, daß alle Versicherungswerte, z. B. die Einmalprämie des heute $(x+m)$ jährigen, von zwei Größen abhängen (wie bei Verwendung einer doppelt abgestuften Sterbetafel), nämlich vom Eintrittsalter und der bisherigen Dauer der betreffenden Versicherung. So ist die Einmalprämie des mit x Jahren Eingetretenen und bereits m Jahre Versicherten, also des heute $(x+m)$ jährigen, eine andere als die des gleichaltrigen Versicherten, der erst jetzt eintritt; denn wenn n Jahre $(n \geqq m)$ hindurch ein veränderlicher Zins und dann ein konstanter herrscht, so ist im ersten Fall noch $(n-m)$ Jahre ein veränderlicher, dann aber der konstante Zinsfuß maßgebend, während im zweiten volle n Jahre hindurch mit dem veränderlichen gerechnet wird.

In den folgenden Untersuchungen soll dieselbe Bezeichnungsweise verwendet werden wie bei doppelt abgestuften Sterbetafeln, d. h. die oben unterschiedenen Einmalprämien des $(x+m)$ jährigen wären mit $A_{[x]+m}$ und $A_{[x+m]}$ zu bezeichnen. Für $m \geqq n$ ist $A_{[x]+m} = A_{[x+m]} = A^{(\bar{i})}_{x+m}$, wo $\bar{i}$, der nach n Jahren geltende konstante Zinsfuß ist.

Berechnung der Leibrentenbarwerte $a_{[x]}$ und $a_{[x]+m}$.

Der Zinsfuß möge n Jahre hindurch abnehmen $(i_1, i_2, \cdots i_n)$ und dann gleich bleiben $(\bar{i})$.

Dann erhält man für den Barwert $a_{[x]}$ der lebenslänglichen Leibrente des mit x Jahren Eingetretenen:

$$a_{[x]} = \frac{l_x + \sum_{\nu=1}^{n} l_{x+\nu}(v_1 v_2 \cdots v_\nu) + (v_1 v_2 \cdots v_n) \sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} l_{x+\nu} \bar{v}^{\nu-n}}{l_x}.$$

Setzt man für $v_1 v_2 \cdots v_\nu$ den Ausdruck (5) ein, so wird:

$$a_{[x]} = \frac{l_x + \sum_{\nu=1}^{n} l_{x+\nu} v_0{}^{\nu} + \delta \sum_{\nu=1}^{n} l_{x+\nu} \frac{\nu(\nu+1)}{2} v_0{}^{\nu}}{l_x} +$$

$$+ \frac{\delta^2 \sum_{\nu=1}^{n} l_{x+\nu} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} v_0{}^{\nu} + (v_1 v_2 \cdots v_n) \sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} l_{x+\nu} \bar{v}^{\nu-n}}{l_x}$$

und schließlich:

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} a_{[x]} = {}_{|n+1}a_x^{(i_0)} + (v_1 v_2 \cdots v_n)\bar{v}^{-n} \cdot {}_{n+1|}a_x^{(\bar{i})} + \\ \quad + \delta \dfrac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}} + \delta^2 \dfrac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}. \end{array} \right.$$

Diese Formel gilt zunächst, wie aus der Ableitung hervorgeht, nur für $\omega - x > n$. Ist $\omega - x \leqq n$, so hat man:

(7a)

$$a_{[x]} = a_x^{(i_0)} + \delta \frac{\sum_{\nu=1}^{\omega-x} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}} + \delta^2 \frac{\sum_{\nu=1}^{\omega-x} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}.$$

(7) geht aber in (7a) über, wenn man $\omega - x \leqq n$ wählt.

Bei den späteren zahlenmäßigen Untersuchungen ist stets $\omega - x > n$. Deswegen ist bei den noch folgenden Formeln nur die erste Form hingeschrieben worden.

Die Rente $a_{[x]}$ zerfällt also für $\omega - x > n$ in eine temporäre Rente mit dem Zinsfuß i_0, die $(n+1)$ Jahre läuft, und in eine lebens-

längliche aufgeschobene Rente zum Zinsfuß $\bar{i}$ (mit einem konstanten Faktor), die im Zeitpunkt $(x+n+1)$ beginnt. Dazu treten noch die Glieder mit δ und δ^2, die die jährliche Zinsänderung zum Ausdruck bringen.

Man kann $a_{[x]}$ auch auffassen als Barwert einer lebenslänglichen Leibrente zum konstanten Zinsfuß i_0 mit veränderlichen Auszahlungen. Zu diesem Zweck braucht man $a_{[x]}$ nur so zu schreiben:

$$a_{[x]} = \frac{l_x + l_{x+1}\frac{v_1}{v_0}v_0 + \cdots + l_{x+n}\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}{v_0}^n + l_{x+n+1}\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}\frac{\bar{v}}{v_0}{v_0}^{n+1} + \cdots}{l_x}$$

Die Auszahlungen betragen dann:

am Anfang	des	ersten	Jahres:			1,
„	„	„	zweiten	„	:	$\frac{v_1}{v_0}$,
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
„	„	„	$(n+1)$ten	„	:	$\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}$,
„	„	„	$(n+2)$ten	„	:	$\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}\frac{\bar{v}}{v_0}$,
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
„	„	„	$(n+\mu)$ten	„	:	$\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}\left(\frac{\bar{v}}{v_0}\right)^{\mu-1}$.

Sie steigen also von der $(n+1)$ten ab wie die Glieder einer geometrischen Reihe (da $\bar{i} < i_0$).

Eine andere Möglichkeit ist die, daß man $a_{[x]}$ als Rente ansieht, die n Jahre hindurch mit dem Zinsfuß i_0 und dann mit dem Zinsfuß $\bar{i}$ gerechnet wird. Es ist:

$$a_{[x]} = \frac{l_x + l_{x+1}\frac{v_1}{v_0}v_0 + \cdots + l_{x+n}\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}{v_0}^n + l_{x+n+1}\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}{v_0}^n\bar{v} + \cdots}{l_x},$$

wobei die jährlichen Rentenbeträge folgende Werte annehmen:

am Anfang des ersten Jahres:						1,
„	„	„	zweiten	„	:	$\frac{v_1}{v_0}$,
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.		.
„	„	„	$(n+1)$ten	„	:	$\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}$,
„	„	„	$(n+2)$ten	„	:	$\frac{v_1 v_2 \cdots v_n}{{v_0}^n}$,

usw. gleichbleibend.

Bei beiden Auffassungen sind die Rentenbeträge während der ersten $(n+1)$ Auszahlungen gleich. Während sie aber dann bei der ersten Auffassung geometrisch wachsen, bleiben sie bei der zweiten gleich.

Für die Einmalprämien $A_{[x]}$ läßt sich das Entsprechende machen, ebenso für $a_{[x]+m}$ und $A_{[x]+m}$, wo bei den beiden letzten Versicherungswerten die zweite Auffassung so zu verstehen ist, daß $(n-m)$ Jahre hindurch der Zinsfuß i_0 und dann $\bar{i}$ beträgt.

Der Barwert $a_{[x]+m}$ der lebenslänglichen Leibrente des mit x Jahren Eingetretenen und bereits m Jahre Versicherten wird:

$$a_{[x]+m} = \frac{l_{x+m} + \sum_{\nu=m+1}^{n} l_{x+\nu}(v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_\nu) + (v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_n) \sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} l_{x+\nu} \bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}} =$$

$$= \frac{\sum_{\nu=m}^{n} l_{x+\nu}(v_1 v_2 \cdots v_\nu)}{l_{x+m}(v_1 v_2 \cdots v_m)} + (v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_n) \frac{\sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} l_{x+\nu} \bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}}$$

und mit (5):

$$a_{[x]+m} = \frac{\sum_{\nu=m}^{n} l_{x+\nu} {v_0}^\nu + \delta \sum_{\nu=m}^{n} l_{x+\nu} \frac{\nu(\nu+1)}{2} {v_0}^\nu + \delta^2 \sum_{\nu=m}^{n} l_{x+\nu} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} {v_0}^\nu}{l_{x+m}(v_1 v_2 \cdots v_m)} +$$

$$+ (v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_n) \frac{\sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} l_{x+\nu} \bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}} =$$

$$= \frac{\sum_{\nu=m}^{n} D_{x+\nu}^{(i_0)} + \delta \sum_{\nu=m}^{n} D_{x+\nu}^{(i_0)} \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \delta^2 \sum_{\nu=m}^{n} D_{x+\nu}^{(i_0)} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}}{D_{x+m}^{(i_0)} \frac{v_1 v_2 \cdots v_m}{{v_0}^m}} +$$

$$+ (v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_n) \bar{v}^{m-n} \frac{\sum_{\nu=n+1}^{\omega-x} D_{x+\nu}^{(\bar{i})}}{D_{x+m}^{(\bar{i})}}.$$

Als endgültige Formel ergibt sich:

$$(8) \quad \left| \begin{array}{l} a_{[x]+m} = \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m} \, {}_{|n-m+1}a_{x+m}^{(i_0)} + \\ \qquad + (v_{m+1} v_{m+2} \cdots v_n) v^{-m-n} \, {}_{n-m+1|}a_{x+m}^{(\bar{i})} + \\ \qquad + \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m} \delta \frac{\sum_{\nu=m}^{n} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_{x+m}^{(i_0)}} + \\ \qquad + \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m} \delta^2 \frac{\sum_{\nu=m}^{n} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_{x+m}^{(i_0)}}. \end{array} \right.$$

Berechnung der Einmalprämien $A_{[x]}$ und $A_{[x]+m}$.

Für die Einmalprämie der lebenslänglichen Todesfallversicherung des mit x Jahren Eingetretenen findet man:

$$A_{[x]} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} d_{x+\nu-1} (v_1 v_2 \cdots v_\nu) + (v_1 v_2 \cdots v_n) \sum_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} d_{x+\nu-1} \bar{v}^{\nu-n}}{l_x}.$$

Unter Berücksichtigung von (5) erhält man:

$$A_{[x]} =$$

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} d_{x+\nu-1} {v_0}^\nu + \delta \sum_{\nu=1}^{n} d_{x+\nu-1} \frac{\nu(\nu+1)}{2} {v_0}^\nu + \delta^2 \sum_{\nu=1}^{n} d_{x+\nu-1} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} {v_0}^\nu +}{l_x}$$

$$\frac{+ (v_1 v_2 \cdots v_n) \sum_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} d_{x+\nu-1} \bar{v}^{\nu-n}}{l_x}$$

oder:

$$(9)\quad \begin{cases} A_{[x]} = {}_{|n}A_x^{(i_0)} + (v_1 v_2 \cdots v_n)\, \bar{v}^{-n}\, {}_{n|}A_x^{(\bar{i})} + \\ \quad + \delta \dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\nu(\nu+1)}{2} C_{x+\nu-1}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}} + \delta^2 \dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} C_{x+\nu-1}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}. \end{cases}$$

Entsprechend ergibt sich für die Einmalprämie des mit x Jahren Eingetretenen und bereits m Jahre Versicherten:

$$A_{[x]+m} = \frac{\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} d_{x+\nu-1}(v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_\nu) + (v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n) \sum\limits_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} d_{x+\nu-1}\, \bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} d_{x+\nu-1}(v_1 v_2 \cdots v_\nu)}{l_{x+m}(v_1 v_2 \cdots v_m)} + (v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n) \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} d_{x+\nu-1}\bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}}$$

und mit (5):

$$A_{[x]+m} =$$

$$\frac{\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} d_{x+\nu-1} v_0^{\nu} + \delta \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} d_{x+\nu-1} \frac{\nu(\nu+1)}{2} v_0^{\nu} + \delta^2 \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} d_{x+\nu-1} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!} v_0^{\nu}}{l_{x+m}(v_1 v_2 \cdots v_m)} +$$

$$+ (v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n) \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} d_{x+\nu-1}\bar{v}^{\nu-n}}{l_{x+m}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\nu=m+1}^{n} C_{x+\nu-1}^{(i_0)} + \delta \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} C_{x+\nu-1}^{(i_0)} \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \delta^2 \sum\limits_{\nu=m+1}^{n} C_{x+\nu-1}^{(i_0)} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}}{D_{x+m}^{(i_0)} \frac{v_1 v_2 \cdots v_m}{v_0^m}} +$$

$$+ (v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n)\, \bar{v}^{m-n} \frac{\sum\limits_{\nu=n+1}^{\omega-x+1} C_{x+\nu-1}^{(\bar{i})}}{D_{x+m}^{(\bar{i})}},$$

also:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_{[x]+m} = {} & \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m}\, {}_{|n-m}A^{(i_0)}_{x+m} + (v_{m+1}\, v_{m+2} \cdots v_n)\, \bar{v}^{m-n}\, {}_{n-m|}A^{(\bar{i})}_{x+m} + \\
& + \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m}\, \delta\, \frac{\sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\nu(\nu+1)}{2}\, C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}} + \\
& + \frac{{v_0}^m}{v_1 v_2 \cdots v_m}\, \delta^2\, \frac{\sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{4!}\, C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aus $A_{[x]}$ und $a_{[x]}$ errechnet sich die jährliche Nettoprämie $P_{[x]}$ für die reine Todesfallversicherung bei lebenslänglicher Prämienzahlung nach der Formel:

$$
(11)\qquad P_{[x]} = \frac{A_{[x]}}{a_{[x]}}.
$$

Das Nettodeckungskapital derselben Versicherung ist:

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
{}_mV_{[x]} &= A_{[x]+m} - P_{[x]}\, a_{[x]+m} && (m < n) \\
{}_mV_{[x]} &= A^{(\bar{i})}_{x+m} - P_{[x]}\, a^{(\bar{i})}_{x+m} && (m \geqq n).
\end{aligned}
\right.
$$

2. Zahlenmäßige Auswertung der abgeleiteten Formeln (erste Annahme über den Zinsverlauf).

Im folgenden ist angenommen worden, daß der Zinsfuß in 15 Jahren von 4 % auf $2\,{}^1/_2$ % fällt und dann konstant bleibt, d. h. in Formel (1) ist $i_0 = 0{,}04$ und $d = 0{,}001$ (also $i_{15} = 0{,}025$) zu setzen und weiter $i_{16} = i_{17} = \cdots \bar{i} = 0{,}025$. Mit diesem Zinsfuß und unter Zugrundelegung der Allgemeinen Deutschen Sterbetafel, 1924—1926, Männer, sind dann die Formeln (7), (9), (11) und (12) numerisch ausgewertet worden (Übersicht 3 und 4).

Die nachstehende Übersicht 2 enthält den Zinsverlauf, in der ersten Spalte den gegebenen Zinsfuß (Formel (1)), in der zweiten Spalte den mit der linearen Formel (4) und in der letzten den mit der quadratischen Formel (6) berechneten. Man sieht, daß der nach (6) berechnete Zinsfuß von dem gegebenen um höchstens 0,0097 % abweicht, während bei Verwendung von (4) ein Unterschied von 0,1552 % entsteht. Die Hinzunahme des quadratischen Gliedes in der Reihenentwicklung von (2) ist also gerechtfertigt (das zeigt auch Übersicht 1 S. 4).

Übersicht 2.

Gegebener und nach (4) und (6) berechneter Zinsfuß.

Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (4) berechn. Zinsfuß %	Nach (6) berechn. Zinsfuß %	Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (4) berechn. Zinsfuß %	Nach (6) berechn. Zinsfuß %
1	3,9	3,9001	3,9000	9	3,1	3,1373	3,1009
2	3,8	3,8006	3,8000	10	3,0	3,0502	3,0015
3	3,7	3,7017	3,7000	11	2,9	2,9656	2,9023
4	3,6	3,6038	3,6000	12	2,8	2,8837	2,8035
5	3,5	3,5071	3,5001	13	2,7	2,8046	2,7050
6	3,4	3,4119	3,4001	14	2,6	2,7284	2,6070
7	3,3	3,3184	3,3003	15	2,5	2,6552	2,5097
8	3,2	3,2268	3,2005				

Übersicht 3.

Leibrentenbarwerte $a_{[x]}$, Einmalprämien $A_{[x]}$ und Jahresprämien $P_{[x]}$ für die erste Annahme über den Zinsverlauf.

x	$a_{[x]}$	$A_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$	$P_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$
20	24,895	30,863	1,240
21	24,684	31,378	1,271
22	24,472	31,894	1,303
23	24,256	32,420	1,337
24	24,031	32,966	1,372
25	23,799	33,532	1,409
26	23,558	34,117	1,448
27	23,309	34,724	1,490
28	23,050	35,354	1,534
29	22,781	36,011	1,581
30	22,502	36,693	1,631
31	22,215	37,395	1,683
32	21,921	38,116	1,739
33	21,618	38,860	1,798
34	21,306	39,626	1,860
35	20,986	40,412	1,926
36	20,660	41,218	1,995
37	20,328	42,038	2,068
38	19,989	42,873	2,145
39	19,644	43,727	2,226
40	19,293	44,596	2,312
41	18,936	45,479	2,402
42	18,575	46,375	2,497
43	18,209	47,283	2,597

Übersicht 3 (Fortsetzung).

x	$a_{[x]}$	$A_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$	$P_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$
44	17,838	48,205	2,702
45	17,461	49,146	2,815
46	17,081	50,097	2,933
47	16,695	51,059	3,058
48	16,305	52,037	3,191
49	15,911	53,027	3,333
50	15,515	54,029	3,482
51	15,115	55,038	3,641
52	14,713	56,060	3,810
53	14,306	57,091	3,991
54	13,899	58,130	4,182
55	13,494	59,170	4,385
56	13,087	60,212	4,601
57	12,682	61,262	4,831
58	12,277	62,317	5,076
59	11,872	63,375	5,338
60	11,468	64,428	5,618
61	11,068	65,495	5,918
62	10,667	66,553	6,239
63	10,270	67,611	6,583
64	9,878	68,673	6,952
65	9,490	69,726	7,347
66	9,109	70,780	7,770
67	8,735	71,819	8,222
68	8,367	72,831	8,705
69	8,007	73,846	9,223
70	7,652	74,867	9,784

Übersicht 4.

Nettoreserven nach (Formel (12) für die erste Annahme über den Zinsverlauf (für 100,—).

m	$x=20$	$x=30$	$x=40$	$x=50$	m	$x=20$	$x=30$	$x=40$	$x=50$
1	0,86	1,30	1,88	2,62	11	11,30	16,61	22,70	30,03
2	1,74	2,64	3,80	5,28	12	12,54	18,29	24,88	32,72
3	2,65	4,04	5,77	7,99	13	13,80	19,98	27,06	35,37
4	3,59	5,49	7,78	10,73	14	15,08	21,67	29,22	37,95
5	4,58	6,98	9,84	13,49	15	16,39	23,37	31,35	40,46
6	5,60	8,52	11,92	16,25	16	17,72	25,08	33,47	42,94
7	6,66	10,08	14,04	19,02	17	19,07	26,81	35,60	45,36
8	7,77	11,67	16,18	21,79	18	20,45	28,56	37,72	47,73
9	8,91	13,30	18,35	24,56	19	21,85	30,34	39,83	50,06
10	10,09	14,95	20,52	27,31	20	23,28	32,12	41,94	52,34

In den folgenden Übersichten 5—8 sind die berechneten Versicherungswerte mit den entsprechenden Werten bei einem konstanten Zinsfuß von 4 %, $3\frac{1}{2}$ % und 3 % verglichen worden. Und zwar enthalten die Übersichten die Differenzen der berechneten Werte und der bei konstantem Zins in Prozenten der letzteren.

Bei den Renten (Übersicht 5) nehmen diese Differenzen mit steigendem Alter x ab (Ausnahme bei $x = 65$ für 3 %). Während sie aber bei 4 % und $3\frac{1}{2}$ % stets positiv bleiben, sind sie bei 3 % von $x = 29$ ab negativ (vgl. Abb. 1). Für 3 % liegen sie zwischen + 0,90 % und — 2,56 %, sind also nicht sehr erheblich. In Abb. 1 ist die Differenz $a_{[x]} - a_x^{(3\%)}$ dargestellt. Sie ist zuerst positiv, nimmt beständig ab, wird negativ und steigt dann wieder, bleibt aber negativ. Bei $x = 53$ bzw. 54 erreicht sie ihrem Betrage nach den größten Wert (— 0,318), während sie für $x = 29$ fast verschwindet (— 0,004).

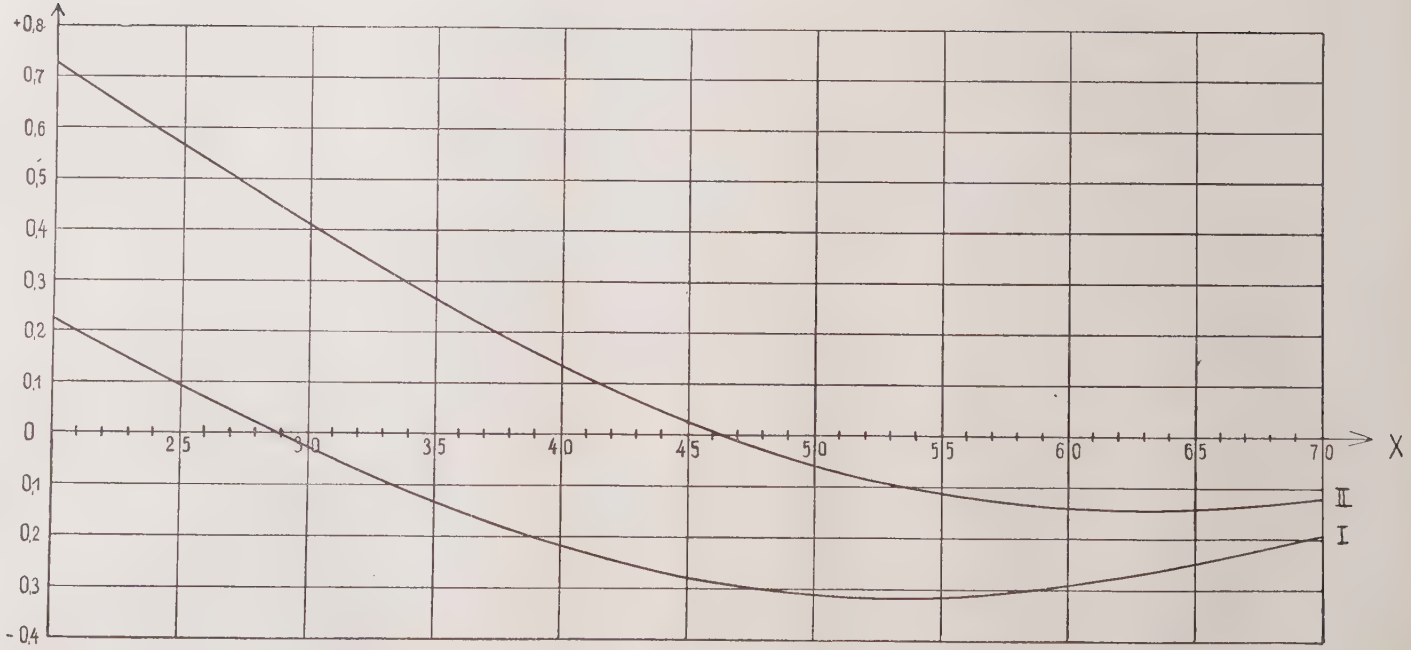
Übersicht 5.

Vergleich von $a_{[x]}$ mit $a_x^{(4\%)}$, $a_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$ und $a_x^{(3\%)}$.

x	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(4\%)}} - 1\right)$	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(3\frac{1}{2}\%)}} - 1\right)$	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(3\%)}} - 1\right)$
20	+ 19,41	+ 10,05	+ 0,90
25	17,67	8,93	+ 0,40
30	15,82	7,77	— 0,12
35	13,93	6,58	0,63
40	12,02	5,39	1,12
45	10,12	4,23	1,57
50	8,28	3,13	1,97
55	6,55	2,11	2,28
60	4,97	1,23	2,48
65	3,60	0,52	2,56
70	+ 2,49	+ 0,03	— 2,45

Auch bei den Einmalprämien (Übersicht 6) nehmen die relativen Differenzen mit wachsendem x ab. $A_{[x]}$ ist stets größer als $A_x^{(4\%)}$ und $A_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$, während $A_x^{(3\%)}$ von $x = 51$ ab größer als $A_{[x]}$ ist. Die Prozentzahlen sind im allgemeinen erheblich größer als bei den Renten. So schwanken sie bei 3 % zwischen + 9,69 % und — 2,96 %. Die Kurve $A_{[x]} - A_x^{(3\%)}$ (Abb. 2) fällt im Gegensatz zu $a_{[x]} - a_x^{(3\%)}$ im ganzen Intervall. Sie liegt bis in viel höhere Alter über der Abszissenachse. Ihren größten Betrag erreicht die Differenz $A_{[x]} - A_x^{(3\%)}$ am Intervallanfang, nämlich 2,726, den kleinsten für $x = 51$ (wo sie den Wert — 0,022 annimmt).

Abb. 1. Differenz der Leibrentenbarwerte $a_{[x]}$ und $a_x^{(3\%)}$.
(Beide Annahmen über den Zinsverlauf.)



Übersicht 6.

Vergleich von $A_{[x]}$ mit $A_x^{(4\,\%)}$, $A_x^{(3\frac{1}{2}\,\%)}$ und $A_x^{(3\,\%)}$.

x	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(4\,\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(3\frac{1}{2}\,\%)}}\right)-1$	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(3\,\%)}}\right)-1$
20	+ 55,74	+ 31,33	+ 9,69
25	50,98	28,38	8,32
30	45,16	24,85	6,72
35	38,63	20,95	5,00
40	32,10	17,06	3,30
45	25,97	13,38	1,69
50	20,34	9,98	+ 0,23
55	15,37	6,97	− 1,02
60	11,13	4,44	2,00
65	7,66	2,43	2,67
70	+ 5,01	+ 0,99	− 2,96

Die Übersicht 7 für die jährlichen Prämien zeigt einen ähnlichen Verlauf. Auch hier fallen die relativen Differenzen mit steigendem x. Die Kurve der Differenzen $P_{[x]} - P_x^{(3\,\%)}$ (Abb. 3) beginnt im Positiven, steigt etwas und fällt dann ins Negative. Um das Alter 30 herum ist die Differenz am größten (+ 0,105), bei $x = 64$ verschwindet sie.

Übersicht 7.

Vergleich von $P_{[x]}$ mit $P_x^{(4\,\%)}$, $P_x^{(3\frac{1}{2}\,\%)}$ und $P_x^{(3\,\%)}$.

x	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(4\,\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(3\frac{1}{2}\,\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(3\,\%)}}\right)-1$
20	+ 30,4	+ 19,3	+ 8,8
25	28,3	17,8	7,9
30	25,4	15,8	6,9
35	21,7	13,5	5,7
40	18,0	11,1	4,5
45	14,4	8,8	3,3
50	11,1	6,6	2,2
55	8,3	4,8	1,3
60	5,9	3,2	+ 0,5
65	3,9	1,9	− 0,1
70	+ 2,5	+ 1,0	− 0,5

Im Gegensatz zu den bereits besprochenen Versicherungswerten sind die berechneten Reserven im betrachteten Intervall stets größer als die 3 %igen (Übersicht 8 und Abb. 4). Abgesehen von dem Verlauf bei $x = 50$ für 3 % und $3\,^1/_2$ % steigen die Reservedifferenzen für jeden der drei Vergleichszinsfüße und alle betrachteten Eintritts-

Abb. 2. Differenz der Einmalprämien $A_{[x]}$ und $A_x^{(3\%)}$.
(Beide Annahmen über den Zinsverlauf.)

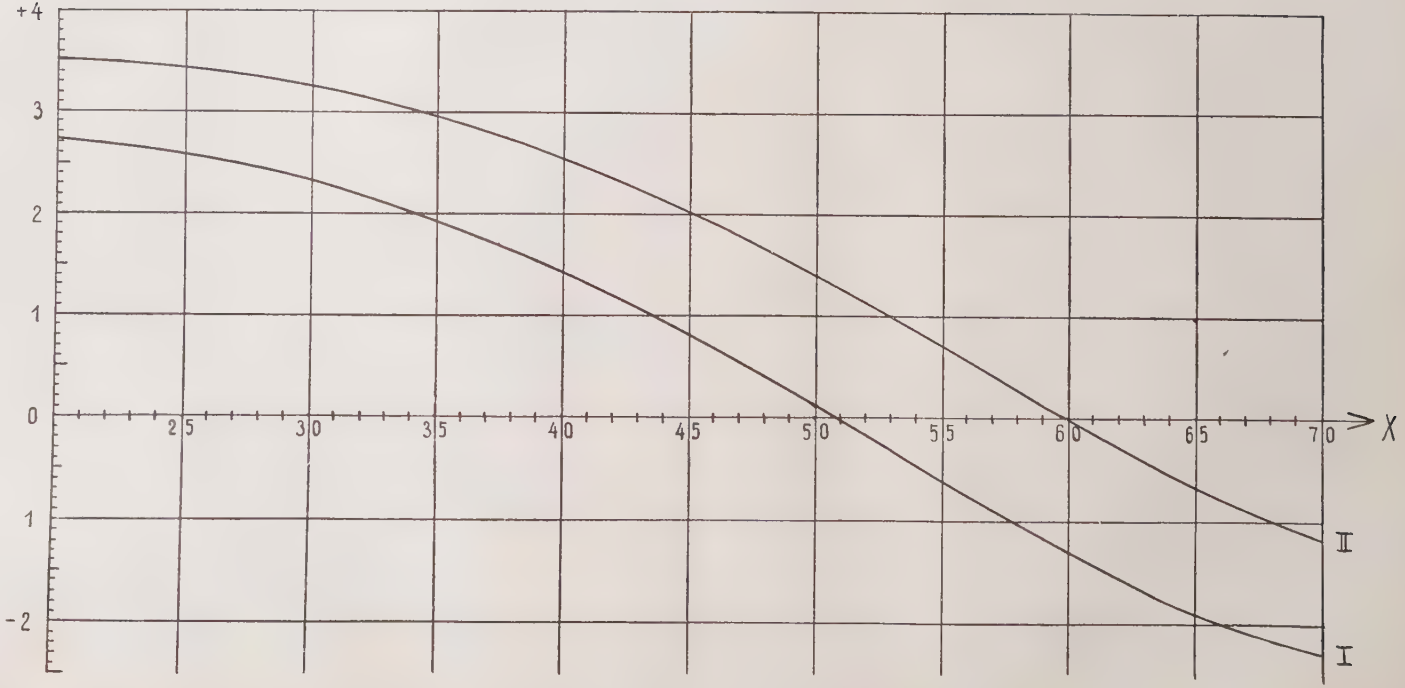
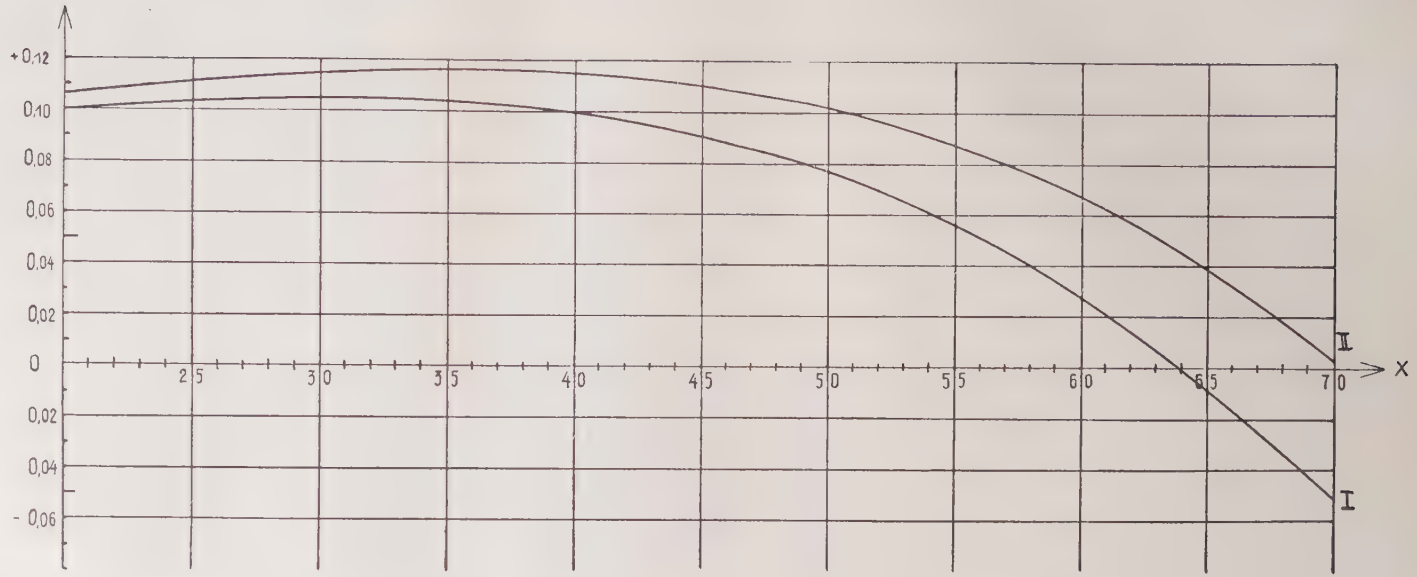


Abb. 3. Differenz der Jahresprämien $P_{[x]}$ und $P_x^{(3\%)}$.
(Beide Annahmen über den Zinsverlauf.)



alter mit wachsender Dauer m ständig, während die relativen Differenzen im allgemeinen mit m erst etwas steigen und dann fallen.

Betrachtet man den Verlauf der Differenzen bei festem Vergleichszinsfuß und fester Dauer m als Funktion des Eintrittsalters x, so sieht man, daß die relativen Differenzen mit steigendem x abnehmen, die tatsächlichen Differenzen aber für $m = 1$ mit x steigen (ausgenommen von $x = 40$ nach $x = 50$ bei 3 %) und für $m = 5$ und 10 bis zum vorletzten Eintrittsalter ($x = 40$) steigen und dann fallen. Bei $m = 15$ hört der Anstieg schon früher auf, und bei $m = 20$ sinken die Differenzen ständig (wenigstens bei 4 % und $3\,^1/_2$ %). D. h. also bei einer Umstellung des Rechnungszinsfußes von einem der konstanten Sätze auf den veränderlichen wird bei gleicher Versicherungssumme für Versicherungen mit kleiner verflossener Dauer im allgemeinen um so mehr erforderlich sein, je höher das Eintrittsalter ist. Dieser Zusammenhang zwischen Eintrittsalter und Reservedifferenz ändert sich mit wachsendem m derart, daß das Maximum der letzteren für immer kleinere x-Werte angenommen wird. Bei $m = 20$ fallen die Differenzen für (4 % und $3\,^1/_2$ %) mit steigendem x beständig. Das Maximum liegt am Anfang bei $x = 20$. Es ist also gerade umgekehrt wie bei $m = 1$.

Übersicht 8.

Vergleich von ${}_mV_{[x]}$ mit ${}_mV_x^{(4\,\%)}$, ${}_mV_x^{(3\,^1/_2\,\%)}$ und ${}_mV_x^{(3\,\%)}$.

m	${}_mV_{[x]} - {}_mV_x^{(4\,\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(4\,\%)}$	${}_mV_{[x]} - {}_mV_x^{(3\,^1/_2\,\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(3\,^1/_2\,\%)}$	${}_mV_{[x]} - {}_mV_x^{(3\,\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(3\,\%)}$
			$x = 20$			
1	+ 0,30	53,6	+ 0,21	32,3	+ 0,11	14,7
5	1,60	53,7	1,15	33,5	0,66	16,8
10	3,28	48,2	2,39	31,0	1,40	16,1
15	4,75	40,8	3,43	26,5	1,99	13,8
20	+ 5,89	33,9	+ 4,20	22,0	+ 2,36	11,3
			$x = 30$			
1	+ 0,35	36,8	+ 0,24	22,6	+ 0,13	11,1
5	1,79	34,5	1,29	22,7	0,72	11,5
10	3,60	31,7	2,62	21,2	1,55	11,6
15	4,99	27,1	3,60	18,2	2,11	9,9
20	+ 5,87	22,4	+ 4,17	14,9	+ 2,37	8,0
			$x = 40$			
1	+ 0,37	24,5	+ 0,25	15,3	+ 0,13	7,4
5	1,91	24,1	1,36	16,0	0,76	8,4
10	3,71	22,1	2,70	15,2	1,63	8,6
15	4,88	18,4	3,54	12,7	2,13	7,3
20	+ 5,38	14,7	+ 3,83	10,0	+ 2,22	5,6
			$x = 50$			
1	+ 0,37	16,4	+ 0,25	10,5	+ 0,12	4,8
5	1,88	16,2	1,33	10,9	0,75	5,9
10	3,57	15,0	2,61	10,6	1,62	6,3
15	4,40	12,2	3,22	8,6	2,00	5,2
20	+ 4,44	9,3	+ 3,19	6,5	+ 1,91	3,8

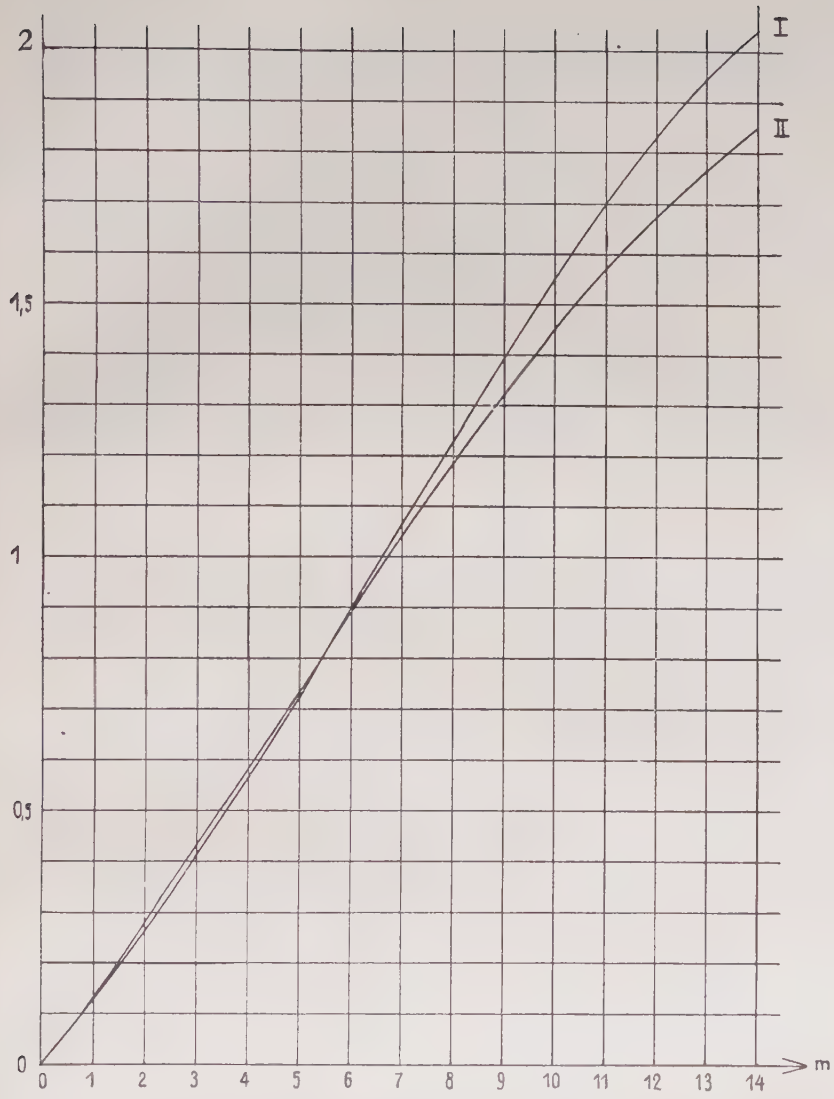


Abb. 4. Differenz der Nettoreserven ${}_mV_{[x]}$ und ${}_mV_x^{(3\%)}$ für $x = 30$.
(Beide Annahmen über den Zinsverlauf.)

II. Erweiterung auf den Fall, daß der Zinsfuß eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bildet.

1. Entwicklung der Formeln.

Die Zinsfüße seien mit $i_0, i_1, \cdots$ bezeichnet und die Differenzen $i_{\nu+1} - i_\nu$ mit $\Delta^{(1)} i_\nu$ $(\nu = 0, 1, \cdots)$. Die zweiten Differenzen $\Delta^{(2)} i_\nu = \Delta^{(1)} i_{\nu+1} - \Delta^{(1)} i_\nu$ $(\nu = 0, 1 \cdots)$ sind bei einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung konstant. Die Reihe sieht so aus:

$$i_\nu = i_0 + \binom{\nu}{1} \Delta^{(1)} i_0 + \binom{\nu}{2} \Delta^{(2)} i_0 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots).$$

Es sei ein fallender Zins angenommen, d. h. $\Delta^{(1)} i_\nu < 0$ für $\nu = 0, 1, \cdots$. Außerdem sei die Abnahme zuerst stärker und dann schwächer, also $\Delta^{(2)} i_0 > 0$. Setzt man $\Delta^{(1)} i_0 = -d_1$ und $\Delta^{(2)} i_0 = d_2$, so ist der Zinsverlauf durch:

$$i_\nu = i_0 - \nu d_1 + \binom{\nu}{2} d_2 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

gegeben, wo i_0 wieder der Ausgangs- oder Grundzinsfuß und i_ν der im νten Jahre geltende Zinsfuß sein soll. Mit $\delta_1 = \frac{d_1}{1 + i_0}$ und $\delta_2 = \frac{d_2}{1 + i_0}$ wird dann:

$$1 + i_\nu = (1 + i_0) \left[1 - \nu \delta_1 + \binom{\nu}{2} \delta_2 \right]$$

und

$$\frac{v_1 v_2 \cdots v_\nu}{v_0{}^\nu} = \frac{1}{[1 - \delta_1][1 - 2\delta_1 + \delta_2] \cdots \left[1 - \nu \delta_1 + \binom{\nu}{2} \delta_2\right]} \tag{14}$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots).$$

Die rechte Seite von (14) wird nun in eine Taylorsche Reihe nach den beiden unabhängigen Veränderlichen δ_1, δ_2 an der Stelle $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$ entwickelt. Nach der allgemeinen Formel:

$$f_{(\delta_1, \delta_2)} = f_{(0,0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \delta_1}\right)_{(0,0)} \cdot \delta_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \delta_2}\right)_{(0,0)} \cdot \delta_2 +$$
$$+ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial_2 f}{\partial \delta_1{}^2} \right)_{(0,0)} \cdot \delta_1{}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \delta_1 \, \partial \delta_2} \right)_{(0,0)} \cdot \delta_1 \delta_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \delta_2{}^2} \right)_{(0,0)} \cdot \delta_2{}^2 \right]$$
$$+ \text{Restglied}$$

ergibt sich:

$$\frac{1}{[1-\delta_1][1-2\delta_1+\delta_2]\cdots\left[1-\nu\delta_1+\binom{\nu}{2}\delta_2\right]}=$$

$$=1+\frac{\nu(\nu+1)}{2}\delta_1-\frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)}{6}\delta_2+\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{24}\delta_1^2-$$

$$-\frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+1)}{24}\delta_1\delta_2+$$

$$+\frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)(5\nu^3+9\nu^2-5\nu-6)}{360}\delta_2^2=$$

$$=1+a_{10}(\nu)\cdot\delta_1-a_{20}(\nu)\cdot\delta_2+a_{11}(\nu)\cdot\delta_1^2-a_{12}(\nu)\delta_1\delta_2+a_{22}(\nu)\delta_2^2$$

und nach (14):

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 v_2\cdots v_\nu = v_0^{\nu}(1&+a_{10}(\nu)\cdot\delta_1-a_{20}(\nu)\cdot\delta_2+a_{11}(\nu)\cdot\delta_1^2-\\ &-a_{12}(\nu)\cdot\delta_1\delta_2+a_{22}(\nu)\cdot\delta_2^2). \end{aligned}\right.$$

Einsetzen von (15) in (3) liefert:

$$(16)\quad 1+i_\nu=$$

$$(1+i_0)\,\frac{1+a_{10}(\nu-1)\cdot\delta_1-a_{20}(\nu-1)\cdot\delta_2+a_{11}(\nu-1)\cdot\delta_1^2-a_{12}(\nu-1)\cdot\delta_1\delta_2+a_{22}(\nu-1)\cdot\delta_2^2}{1+a_{10}(\nu)\cdot\delta_1-a_{20}(\nu)\cdot\delta_2+a_{11}(\nu)\cdot\delta_1^2-a_{12}(\nu)\cdot\delta_1\delta_2+a_{22}(\nu)\cdot\delta_2^2}$$

$$(\nu=1,2,\cdots).$$

Die Formeln für $a_{[x]}$, $a_{[x]+m}$, $A_{[x]}$ und $A_{[x]+m}$ kann man ohne weiteres angeben. Sie unterscheiden sich nur dadurch von den im ersten Abschnitt abgeleiteten Formeln (7), (8), (9) und (10), daß für $v_1 v_2\cdots v_\nu$ statt (5) der Ausdruck (15) eingesetzt ist.

Es ist:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} a_{[x]} = {}&|_{n+1}a_x^{(i_0)}+(v_1 v_2\cdots v_n)\,\bar{v}^{-n}\,{}_{n+1}|\,a_x^{(\bar{i})}+\\ &+\delta_1\frac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{10}(\nu)\cdot D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}-\delta_2\frac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{20}(\nu)\cdot D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}+\\ &+\delta_1^2\frac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{11}(\nu)\cdot D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}-\delta_1\delta_2\frac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{12}(\nu)\cdot D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}+\\ &+\delta_2^2\frac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{22}(\nu)\cdot D_{x+\nu}^{(i_0)}}{D_x^{(i_0)}}, \end{aligned}\right.$$

$$
(18)\quad
\begin{cases}
a_{[x]+m}=\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\,{}_{|n-m+1}a^{(i_0)}_{x+m}+(v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n)\,\bar v^{m-n}\,{}_{n-m+1|}a^{(\bar i)}_{x+m}+\\
\quad+\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\left\{\delta_1\dfrac{\sum_{\nu=m}^{n}a_{10}(\nu)\,D^{(i_0)}_{x+\nu}}{D^{(i_0)}_{x+m}}-\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=m}^{n}a_{20}(\nu)\,D^{(i_0)}_{x+\nu}}{D^{(i_0)}_{x+m}}\right\}+\\
\quad+\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\left\{{\delta_1}^2\dfrac{\sum_{\nu=m}^{n}a_{11}(\nu)\,D^{(i_0)}_{x+\nu}}{D^{(i_0)}_{x+m}}-\right.\\
\quad\left.-\delta_1\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=m}^{n}a_{12}(\nu)\,D^{(i_0)}_{x+\nu}}{D^{(i_0)}_{x+m}}+{\delta_2}^2\dfrac{\sum_{\nu=m}^{n}a_{22}(\nu)\,D^{(i_0)}_{x+\nu}}{D^{(i_0)}_{x+m}}\right\},
\end{cases}
$$

$$
(19)\quad
\begin{cases}
A_{[x]}={}_{|n}A^{(i_0)}_{x}+(v_1 v_2\cdots v_n)\,\bar v^{-n}\,{}_{n|}A^{(\bar i)}_{x}+\delta_1\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{10}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x}}-\\
\quad-\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{20}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x}}+{\delta_1}^2\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{11}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x}}-\\
\quad-\delta_1\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{12}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x}}+{\delta_2}^2\dfrac{\sum_{\nu=1}^{n}a_{22}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x}},
\end{cases}
$$

$$
(20)\quad
\begin{cases}
A_{[x]+m}=\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\,{}_{|n-m}A^{(i_0)}_{x+m}+(v_{m+1}v_{m+2}\cdots v_n)\,\bar v^{m-n}\,{}_{n-m|}A^{(\bar i)}_{x+m}+\\
\quad+\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\left\{\delta_1\dfrac{\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{10}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}-\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{20}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}\right\}+\\
\quad+\dfrac{{v_0}^m}{v_1 v_2\cdots v_m}\left\{{\delta_1}^2\dfrac{\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{11}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}-\delta_1\delta_2\dfrac{\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{12}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}+\right.\\
\quad\left.+{\delta_2}^2\dfrac{\sum_{\nu=m+1}^{n}a_{22}(\nu)\,C^{(i_0)}_{x+\nu-1}}{D^{(i_0)}_{x+m}}\right\}.
\end{cases}
$$

Für die Nettoprämie $P_{[x]}$ und das Nettodeckungskapital ${}_mV_{[x]}$ gelten die Formeln (11) und (12) mit den Renten und Einmalprämien nach (17) bis (20).

2. Durchführung eines Beispiels (zweite Annahme über den Zinsverlauf).

Wie bei der ersten Annahme soll der Zinsfuß in 15 Jahren von 4 % auf $2\,{}^1/_2$ % fallen und dann konstant bleiben, d. h. es soll wieder $i_0 = 0{,}04$ und $i_{15} = 0{,}025$ sein. Dann folgt aus (13): $d_1 - 7\,d_2 = 0{,}001$. Da $\Delta^{(1)} i_\nu = i_{\nu+1} - i_\nu = -d_1 + \nu\,d_2$, so ist $\Delta^{(1)} i_\nu = -0{,}001 - (7-\nu)\,d_2$. Nun ist $\Delta^{(1)} i_\nu < 0$ $(\nu = 0, 1, \cdots 14)$ und wird mit wachsendem ν größer, es muß also auch noch $\Delta^{(1)} i_{14} = -0{,}001 + 7\,d_2 < 0$ sein, d. h. $d_2 < \dfrac{0{,}001}{7}$. Es sei $d_2 = 0{,}0001$ gewählt, also $d_1 = 0{,}0017$. Dann lautet (13):

$$(13\,a) \qquad i_\nu = 0{,}04 - 0{,}0017\,\nu + 0{,}0001 \binom{\nu}{2} \quad (\nu = 1, 2, \cdots 15).$$

In der Übersicht 9 ist der gegebene Zinsfuß (Formel (13 a)) und der mit (16) berechnete nebeneinandergestellt. Bei dem ersten Beispiel (Übersicht 2 S. 11) war die größte Abweichung des verwendeten vom gegebenen Zinsfuß 0,0097 %. Hier ist sie nur unwesentlich größer, nämlich 0,0142 %.

Übersicht 9.

Gegebener und nach (16) berechneter Zinsfuß.

Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (16) berechneter Zinsfuß %	Jahr ν	Gegebener Zinsfuß %	Nach (16) berechneter Zinsfuß %
1	3,83	3,8300	9	2,83	2,8324
2	3,67	3,6700	10	2,75	2,7536
3	3,52	3,5200	11	2,68	2,6850
4	3,38	3,3801	12	2,62	2,6269
5	3,25	3,2502	13	2,57	2,5790
6	3,13	3,1305	14	2,53	2,5415
7	3,02	3,0209	15	2,50	2,5142
8	2,92	2,9215			

Die unter Verwendung der beim ersten Beispiel benutzten Sterbetafel berechneten Versicherungswerte sind in den folgenden Übersichten 10 und 11 enthalten.

Übersicht 10.

Leibrentenbarwerte $a_{[x]}$, Einmalprämien $A_{[x]}$ und Jahresprämien $P_{[x]}$ für die zweite Annahme über den Zinsverlauf.

x	$a_{[x]}$	$A_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$	$P_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$
20	25,399	31,639	1,246
21	25,182	32,169	1,277
22	24,964	32,699	1,310
23	24,742	33,240	1,343
24	24,511	33,801	1,379
25	24,272	34,383	1,417
26	24,024	34,985	1,456
27	23,769	35,609	1,498
28	23,503	36,257	1,543
29	23,226	36,931	1,590
30	22,940	37,630	1,640
31	22,646	38,350	1,693
32	22,344	39,089	1,749
33	22,032	39,851	1,809
34	21,712	40,635	1,872
35	21,384	41,439	1,938
36	21,049	42,264	2,008
37	20,707	43,102	2,082
38	20,359	43,955	2,159
39	20,005	44,827	2,241
40	19,645	45,714	2,327
41	19,279	46,614	2,418
42	18,908	47,528	2,514
43	18,532	48,454	2,615
44	18,151	49,393	2,721
45	17,765	50,350	2,834
46	17,374	51,316	2,954
47	16,979	52,294	3,080
48	16,578	53,286	3,214
49	16,174	54,290	3,357
50	15,767	55,304	3,508
51	15,358	56,324	3,667
52	14,945	57,357	3,838
53	14,529	58,396	4,019
54	14,111	59,442	4,212
55	13,695	60,489	4,417
56	13,279	61,534	4,634
57	12,864	62,586	4,865
58	12,449	63,642	5,112
59	12,035	64,697	5,376
60	11,620	65,745	5,658
61	11,211	66,805	5,959
62	10,801	67,853	6,282
63	10,395	68,898	6,628

Übersicht 10 (Fortsetzung).

x	$a_{[x]}$	$A_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$	$P_{[x]}^{(\text{für } 100,-)}$
64	9,994	69,943	6,998
65	9,598	70,977	7,395
66	9,208	72,010	7,820
67	8,827	73,024	8,273
68	8,452	74,009	8,756
69	8,084	74,993	9,277
70	7,723	75,981	9,838

Übersicht 11.

Nettoreserven nach Formel (12) für die zweite Annahme über den Zinsverlauf (für 100,—).

m	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
1	0,87	1,30	1,89	2,64
2	1,75	2,66	3,83	5,32
3	2,66	4,06	5,80	8,05
4	3,60	5,50	7,81	10,79
5	4,58	6,99	9,86	13,55
6	5,59	8,51	11,93	16,28
7	6,64	10,06	14,02	19,02
8	7,73	11,63	16,14	21,76
9	8,85	13,23	18,27	24,48
10	10,02	14,85	20,40	27,18
11	11,20	16,48	22,54	29,86
12	12,42	18,13	24,69	32,50
13	13,67	19,80	26,84	35,11
14	14,94	21,48	28,99	37,68
15	16,25	23,18	31,13	40,21
16	17,58	24,90	33,26	42,70
17	18,94	26,64	35,39	45,13
18	20,32	28,39	37,51	47,51
19	21,73	30,17	39,63	49,84
20	23,16	31,96	41,75	52,14

Da mit Ausnahme des 15. Jahres der wirklich verwendete (nicht der ursprünglich angenommene) Zinsfuß während der Zeit, in der der Zins sich ändert, bei der ersten Annahme (Übersicht 2 S. 11) größer ist als bei der zweiten (Übersicht 9 S. 23), wird man erwarten können, daß die Versicherungswerte im letzteren Fall im allgemeinen höher sind. Das ist bei der Leibrente, der Einmalprämie und der Jahresprämie auch der Fall, aber nicht bei der Nettoreserve (s. Abb. 1—4). Die nach der zweiten Annahme berechnete Reserve ist nur für die

ersten 4—6 Jahre größer als die nach der ersten berechnete. Danach ist es umgekehrt.

Die folgenden Übersichten 12—15 enthalten die den Übersichten 5—8 (S. 13 ff.) entsprechenden Vergleichszahlen für die zweite Annahme. Der Verlauf der Werte ist ein ähnlicher wie bei der ersten, so daß das dort Gesagte sinngemäß auch hier gilt. Nur sind die Jahresprämien für alle betrachteten Alter größer als die 3 %igen im Gegensatz zur ersten Annahme.

Übersicht 12.

Vergleich von $a_{[x]}$ mit $a_x^{(4\%)}$, $a_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$ und $a_x^{(3\%)}$.

x	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(4\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(3\frac{1}{2}\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{a_{[x]}}{a_x^{(3\%)}}-1\right)$
20	+ 21,83	+ 12,28	+ 2,94
25	20,00	11,10	2,39
30	18,08	9,87	1,82
35	16,09	8,60	1,25
40	14,06	7,31	0,69
45	12,03	6,04	+ 0,14
50	10,04	4,81	− 0,37
55	8,14	3,63	0,83
60	6,36	2,57	1,19
65	4,78	1,66	1,45
70	+ 3,44	+ 0,95	− 1,54

Übersicht 13.

Vergleich von $A_{[x]}$ mit $A_x^{(4\%)}$, $A_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$ und $A_x^{(3\%)}$.

x	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(4\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(3\frac{1}{2}\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{A_{[x]}}{A_x^{(3\%)}}-1\right)$
20	+ 59,66	+ 34,63	+ 12,45
25	54,82	31,63	11,07
30	48,86	28,04	9,44
35	42,15	24,03	7,67
40	35,42	20,00	5,89
45	29,06	16,15	4,18
50	23,18	12,58	2,59
55	17,94	9,36	+ 1,19
60	13,40	6,57	0,00
65	9,59	4,27	− 0,92
70	+ 6,58	+ 2,50	− 1,51

Übersicht 14.

Vergleich von $P_{[x]}$ mit $P_x^{(4\%)}$, $P_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$ und $P_x^{(3\%)}$.

x	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(4\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(3\frac{1}{2}\%)}}-1\right)$	$100\left(\frac{P_{[x]}}{P_x^{(3\%)}}-1\right)$
20	+ 31,0	+ 19,9	+ 9,3
25	29,1	18,5	8,5
30	26,1	16,5	7,5
35	22,4	14,2	6,4
40	18,7	11,8	5,2
45	15,2	9,5	4,0
50	12,0	7,4	3,0
55	9,1	5,5	2,0
60	6,6	3,9	1,2
65	4,6	2,6	0,5
70	+ 3,0	+ 1,5	0,0

Übersicht 15.

Vergleich von ${}_mV_{[x]}$ mit ${}_mV_x^{(4\%)}$, ${}_mV_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$ und ${}_mV_x^{(3\%)}$.

m	${}_mV_{[x]}-{}_mV_x^{(4\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(4\%)}$	${}_mV_{[x]}-{}_mV_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(3\frac{1}{2}\%)}$	${}_mV_{[x]}-{}_mV_x^{(3\%)}$	in % von ${}_mV_x^{(3\%)}$
			$x = 20$			
1	+ 0,31	55,4	+ 0,22	33,8	+ 0,12	16,0
5	1,60	53,7	1,15	33,5	0,66	16,8
10	3,21	47,1	2,32	30,1	1,33	15,3
15	4,61	39,6	3,29	25,4	1,85	12,8
20	+ 5,77	33,2	+ 4,08	21,4	+ 2,24	10,7
			$x = 30$			
1	+ 0,35	36,8	+ 0,24	22,6	+ 0,13	11,1
5	1,80	34,7	1,30	22,8	0,73	11,7
10	3,50	30,8	2,52	20,4	1,45	10,8
15	4,80	26,1	3,41	17,2	1,92	9,0
20	+ 5,71	21,8	+ 4,01	14,3	+ 2,21	7,4
			$x = 40$			
1	+ 0,38	25,2	+ 0,26	16,0	+ 0,14	8,0
5	1,93	24,3	1,38	16,3	0,78	8,6
10	3,59	21,4	2,58	14,5	1,51	8,0
15	4,66	17,6	3,32	11,9	1,91	6,5
20	+ 5,19	14,2	+ 3,64	9,6	+ 2,03	5,1
			$x = 50$			
1	+ 0,39	17,3	+ 0,27	11,4	+ 0,14	5,6
5	1,94	16,7	1,39	11,4	0,81	6,4
10	3,44	14,5	2,48	10,0	1,49	5,8
15	4,15	11,5	2,97	8,0	1,75	4,6
20	+ 4,24	8,9	+ 2,99	6,1	+ 1,71	3,4

Durchführung der Rechnung.

Die zahlenmäßige Auswertung der abgeleiteten Formeln wurde dadurch sehr erleichtert, daß ein Teil der Hilfsrechnungen für beide Annahmen verwendet werden konnte. Es war dies bei den Gliedern mit den temporären Renten (bzw. Einmalprämien) zum Zinsfuß i_0 (= 0,04) und mit den aufgeschobenen Renten (bzw. Einmalprämien) zum Zinsfuß $\bar{i}$ (= 0,025) der Fall (vgl. z. B. die Formeln (7) und (17)). Während die 4%igen Werte aus der vorhandenen Allgemeinen Deutschen Sterbetafel 1924 bis 1926, Männer, 4%, entnommen werden konnten, mußte dieselbe Tafel für $2^1/_2$% erst hergestellt werden.

Am langwierigsten war die Berechnung der Faktoren von δ, δ^2, δ_1, δ_2 usw. Zwei der Faktoren in den Formeln (17)—(20), nämlich die von δ_1 und ${\delta_1}^2$, waren dieselben wie die von δ und δ^2 in den Formeln (7)—(10). Die Berechnung ging, um ein Beispiel herauszugreifen, bei $\sum_{\nu=1}^{15} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}$ so vor sich, daß man in der Rechenmaschine den Faktor $D_y^{(i_0)}$ fest ließ und mit allen vorkommenden Werten $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ multiplizierte. Dabei brauchte man bei $y = 21$ nur bis $\nu = 1$, bei $y = 22$ bis $\nu = 2$ zu gehen usw. Erst bei $y = 35$ mußte man bis $\nu = 15$ gehen. Nachdem man dieses rechteckige Schema hergestellt hatte, waren nur noch Additionen vorzunehmen, um die verlangte Summe zu erhalten. Und zwar stehen, wie aus der Formel hervorgeht, die Summanden einer Summe in einer Treppenanordnung, d. h. der Summand, der zu $\nu = \mu + 1$ gehört, steht eine Zeile tiefer als der zu $\nu = \mu$ gehörige. So ergab sich $\sum_{\nu=1}^{15} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}$ und $\sum_{\nu=m}^{15} \frac{\nu(\nu+1)}{2} D_{x+\nu}^{(i_0)}$. Genau so war es bei den anderen vorkommenden Summen.

Für den Vergleich der berechneten Versicherungswerte mit den 3%igen war es noch nötig, die Allgemeine Deutsche Sterbetafel 1924 bis 1926, Männer, für einen Zinsfuß von 3% zu berechnen.

Schlußbetrachtungen.

In dieser Arbeit ist der Liebetanzsche Ansatz nach zwei Richtungen hin erweitert worden. Einmal ist es möglich gewesen, in dem Falle eines gleichmäßig abnehmenden Rechnungszinsfußes durch Hinzunahme des in δ quadratischen Gliedes eine größere Genauigkeit zu erzielen. Das andere Mal hat die Erweiterung auf zwei Veränderliche die Behandlung eines durch eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung dargestellten Zinsverlaufs ermöglicht. Man könnte nun noch weitergehen und die Annahme behandeln, daß der Zinsverlauf eine arithmetische Reihe dritter oder allgemein r ter Ordnung bildet. Empfehlenswert ist dieser Weg nicht, denn die zahlenmäßige Auswertung der so entstehenden Formeln dürfte sehr mühselig werden. Dagegen liegt die Rechenarbeit für die hier behandelten Fälle in erträglichen Grenzen. Damit verliert einer der Haupteinwände gegen die Einführung eines zeitlich veränderlichen Rechnungszinsfußes, nämlich der, daß eine wesentliche Erschwerung der Rechnungen eintrete, an Bedeutung. Anderseits legt die gegenwärtige Tendenz des Ertragszinsfußes die Verwendung eines fallenden Rechnungszinsfußes nahe, wird dadurch doch ein Unterschreiten des letzteren durch den erzielten Zinsfuß mit einer größeren Sicherheit als bei Verwendung eines konstanten Rechnungszinses ausgeschlossen.

Lebenslauf.

Am 24. Mai 1911 bin ich, Gerhard Hoffmann, als Sohn des Julius Hoffmann zu Berlin-Charlottenburg geboren. Nach bestandener Reifeprüfung studierte ich an der Universität Berlin vom Herbst 1929 an Mathematik, Physik und Philosophie. Im Laufe des Studiums wandte sich dann mein Interesse immer mehr dem Versicherungswesen zu, vor allem der Versicherungsmathematik. Ich hörte Vorlesungen bei den Professoren: Bieberbach, Feigl, Hettner, Klose, W. Köhler, v. Mises, Moldenhauer, Nernst, Pollaczek, Rieffert, Rose, E. Schmidt, Schur, Sombart, Spranger, Timpe und Titze. Während einer im Juli 1934 begonnenen praktischen Tätigkeit beim Volkswohl-Bund, Allgemeiner Bestattungs- und Versicherungsverein a. G., die bis zum April 1936 dauerte, hatte ich Gelegenheit, die Anwendung der Versicherungsmathematik in der Praxis kennen zu lernen. Anschließend widmete ich mich der Abfassung meiner Dissertation.

Meinen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Univ.-Doz. Dr. Rose sowie dem Referenten meiner Arbeit, Herrn Prof. Dr. Riebesell für ihr freundliches Interesse an der Arbeit sowie für die während ihrer Entstehung gegebenen Anregungen aussprechen. Ebenfalls gebührt dem Korreferenten meiner Arbeit, Herrn Prof. Dr. Klose, mein Dank.